Hipoteza Riemanna

If I were to awaken after having slept for a thousand years,
my first question would be:
Has the Riemann hypothesis been proven?

David Hilbert

Wydział MiNI PW grupa B6
Rok akademicki 2014/2015 sem. letni
Krótki kurs historii matematyki
Małgorzata Łazęcka
Agata Piskor
Marta Słowik
Michał Suchoński

Liczby pierwsze - początki

Euklides – „Elementy”

Sito Eratostenesa

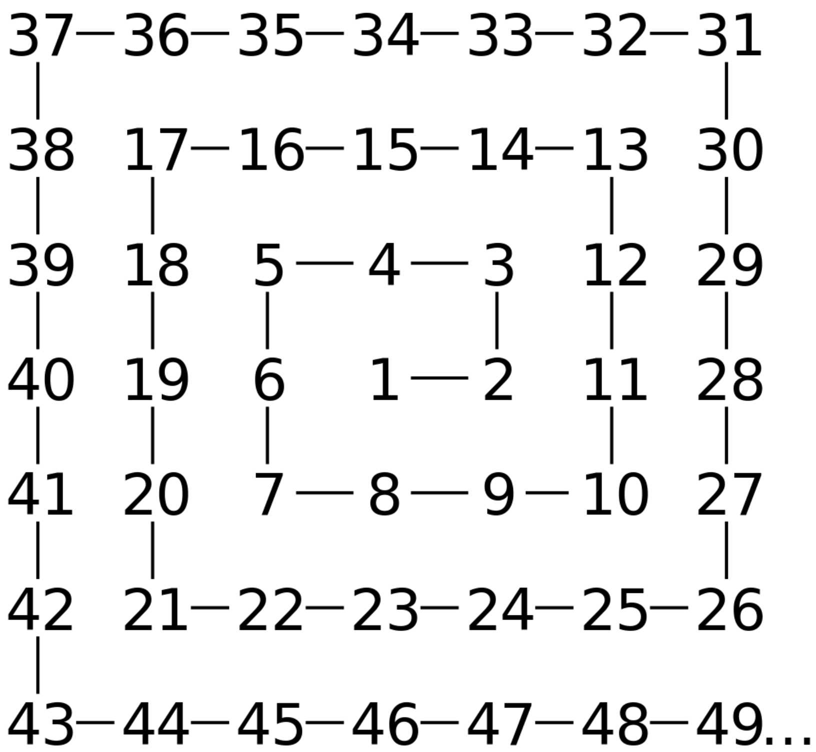
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120

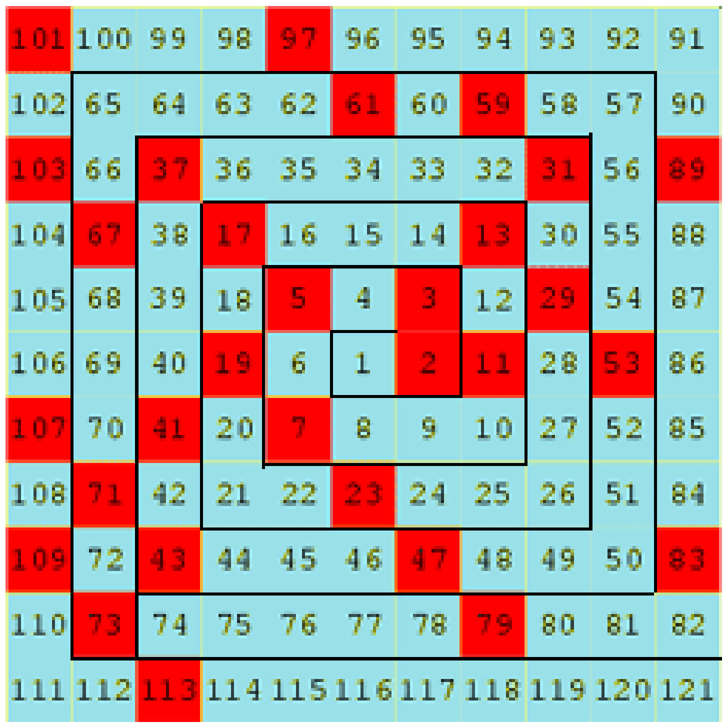
Prime numbers

Zmagania z liczbami pierwszymi

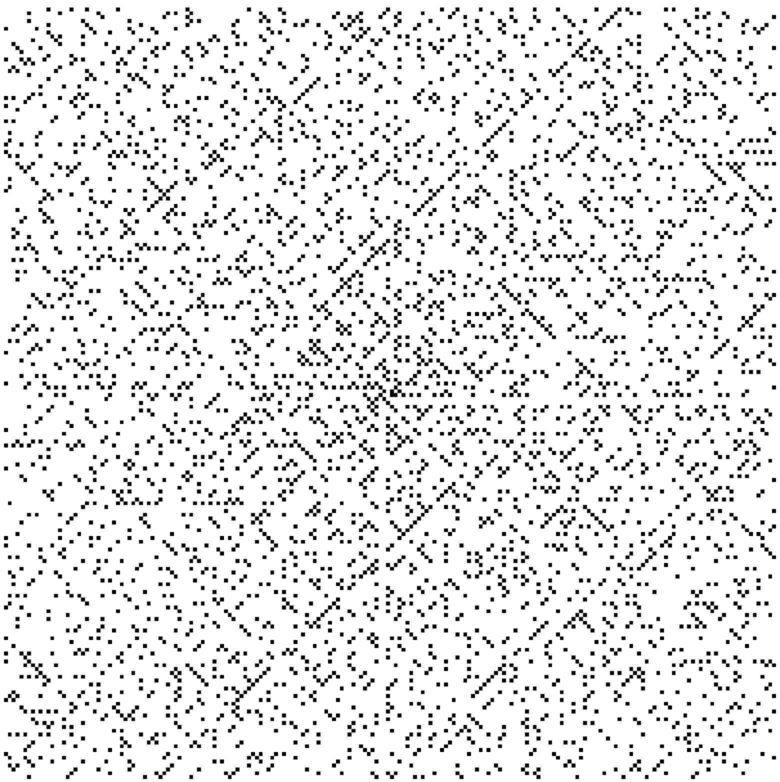
- **1626 r. – Mersenne:**
  Liczby postaci $2^p - 1$
  są pierwsze dla p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257
  (p=67 oraz p=257 są złożone)
- **1640 r. – Fermat:**
  Liczby postaci $F_n = 2^{2^n} + 1$
  są pierwsze
  (Już dla n=5 okazuje się to nieprawdą)
- **1742 r. – Goldbach:**
  Każda liczba parzysta większa od 2 jest sumą dwóch liczb pierwszych
  (hipoteza)
- **1796 r. – Gauss:**
  Twierdzenie o rozmieszczeniu liczb pierwszych wśród liczb naturalnych.

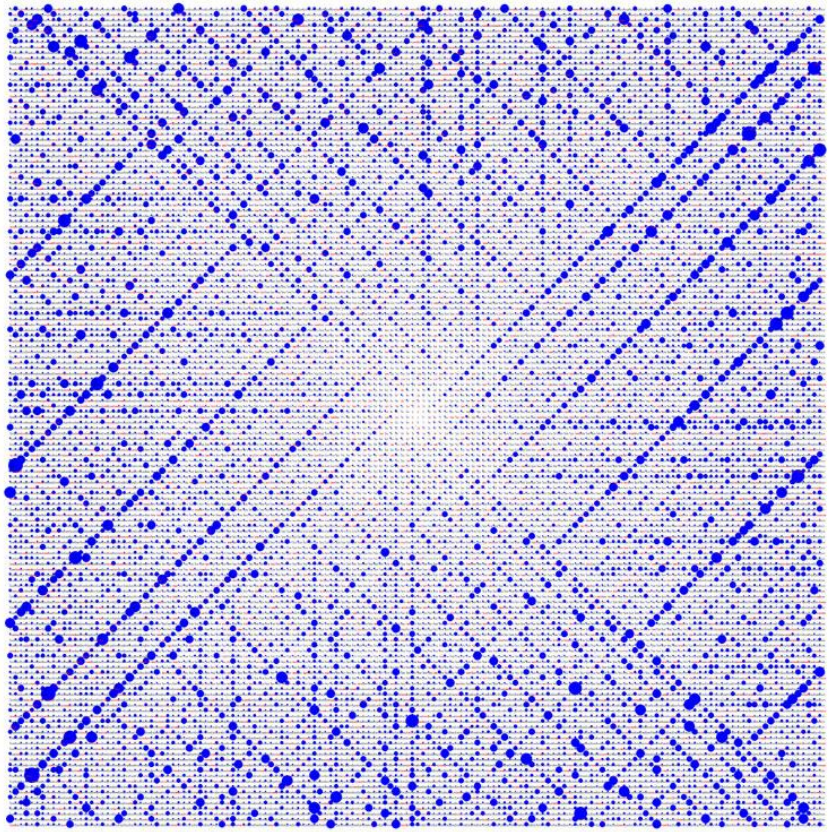
Spirala Ulama





Spirala Ulama





Problem bazylejski – dowód Eulera

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots.$$

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots.$$

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x)}{x} &= \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{3\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{3\pi}\right)\cdots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots.\end{aligned}$$

$$-\left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \cdots\right) = -\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

$$-\frac{1}{6} = -\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Bernhard Riemann

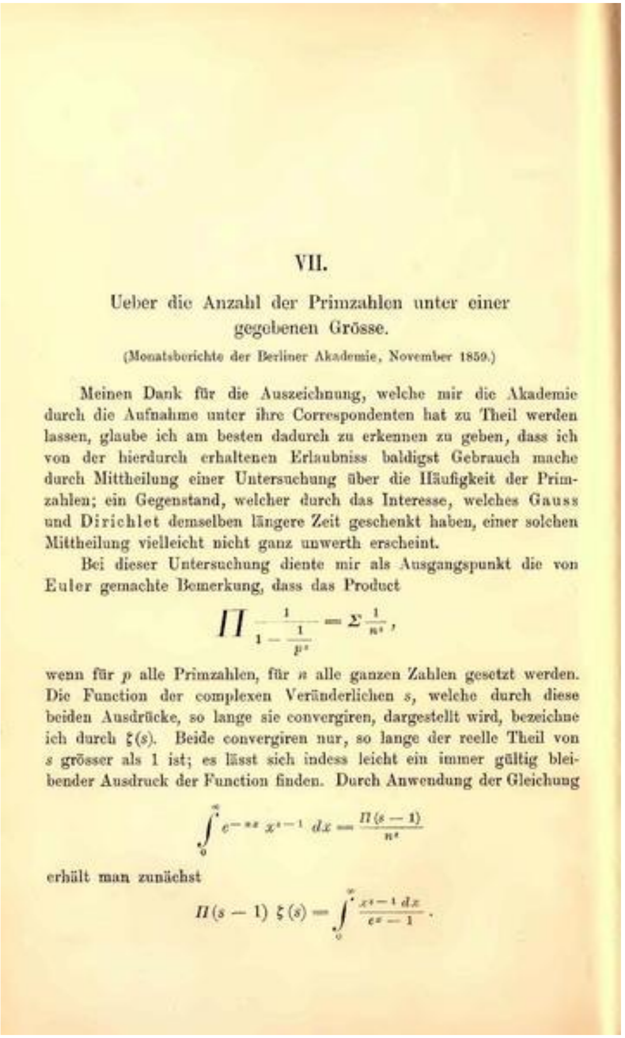
Funkcja dzeta Riemanna

- „Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse” (1859)
- Postaci:

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^z$$

$$\zeta(z) = \frac{1}{1-2^{1-z}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (k+1)^{-z}$$

$$\zeta(z) = \prod_{p} \frac{1}{1-p^{-z}}$$



VII.

Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse.

(Monatsberichte der Berliner Akademie, November 1859.)

Meinen Dank für die Auszeichnung, welche mir die Akademie durch die Aufnahme unter ihre Correspondenten hat zu Theil werden lassen, glaube ich am besten dadurch zu erkennen zu geben, dass ich von der hierdurch erhaltenen Erlaubniss baldigst Gebrauch mache durch Mittheilung einer Untersuchung über die Häufigkeit der Primzahlen; ein Gegenstand, welcher durch das Interesse, welches Gauss und Dirichlet demselben längere Zeit geschenkt haben, einer solchen Mittheilung vielleicht nicht ganz unwerth erscheint.

Bei dieser Untersuchung diente mir als Ausgangspunkt die von Euler gemachte Bemerkung, dass das Product

$$\Pi \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \Sigma \frac{1}{n^s},$$

wenn für p alle Primzahlen, für n alle ganzen Zahlen gesetzt werden. Die Function der complexen Veränderlichen s, welche durch diese beiden Ausdrücke, so lange sie convergiren, dargestellt wird, bezeichne ich durch $\zeta(s)$. Beide convergiren nur, so lange der reelle Theil von s grösser als 1 ist; es lässt sich indess leicht ein immer gültig bleibender Ausdruck der Function finden. Durch Anwendung der Gleichung

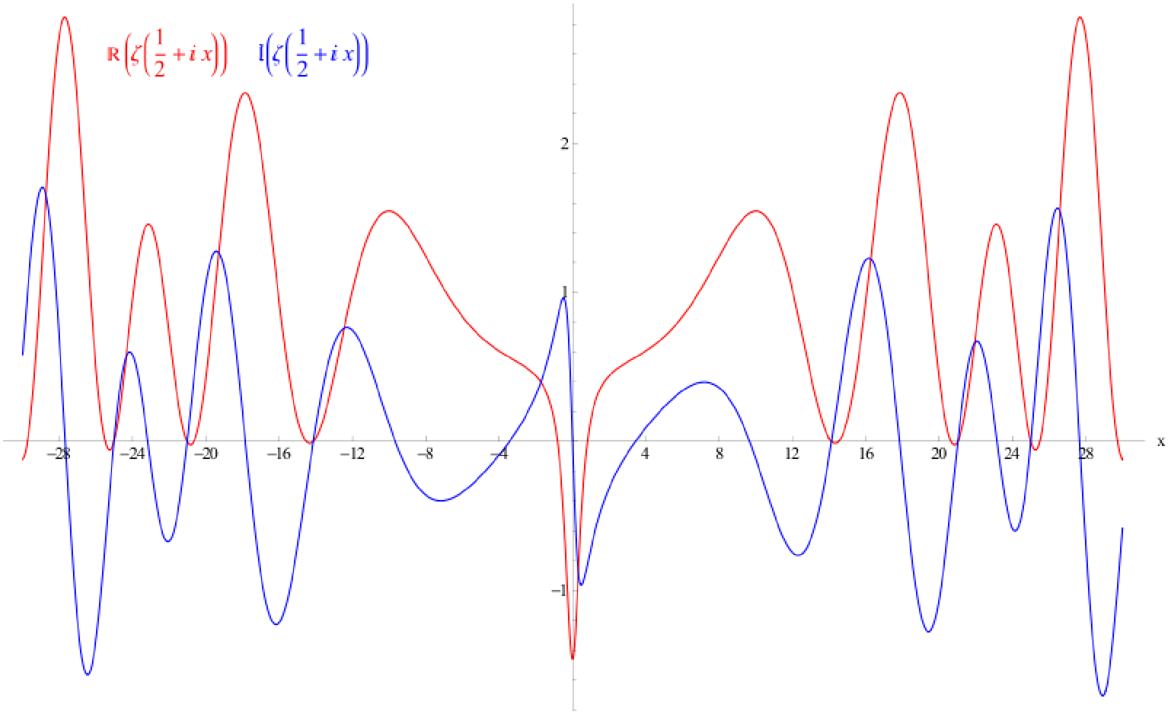
$$\int_0^\infty e^{-nx} x^{s-1}\, dx = \frac{\Pi(s-1)}{n^s}$$

erhält man zunächst

$$\Pi(s-1)\,\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}\, dx}{e^x - 1}.$$

Hipoteza Riemanna

- „Wszystkie nietrywialne miejsca zerowe funkcji dzeta leżą na linii krytycznej”



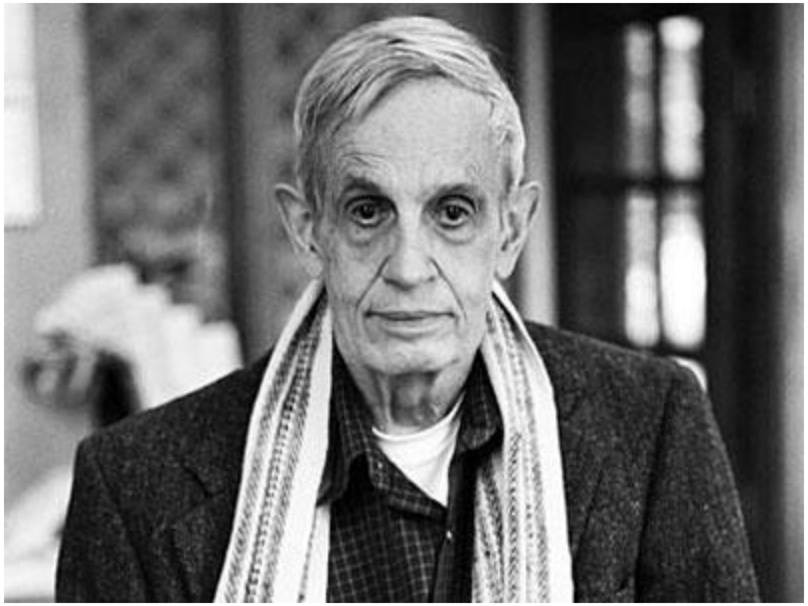
Godfrey Hardy i John Littlewood

Godfrey Hardy i John Littlewood

- Hardy – drugie wcielenie Izaaka Newtona
- Około 100 wspólnych prac
- Jedni z najlepszych w swoich czasach
- Podjęcie wyzwania udowodnienia hipotezy Riemanna (początek XX. wieku)
- 1914 r. – Dowód Hardy’ego, że na prostej leży nieskończenie wiele miejsc zerowych funkcji dzeta
- Klęska uczonych i uznanie, że hipoteza jest nieprawdziwa

John Nash

- Ur. 13 czerwca 1928
- Profesor Uniwersytetu Princeton
- Laureat Nagrody Nobla w dziedzinie ekonomii (1994 r.)
- „Piękny umysł”
- „Ten człowiek jest geniuszem”



John Nash

- Poświęcił część swojego życia na próby udowodnienia hipotezy Riemanna
- 1959 r. - ogłoszenie wyników swoich badań
- Walka ze schizofrenią przez ponad 30 lat

- „Nie śmiałbym powiedzieć, że istnieje bezpośredni związek między matematyką a szaleństwem, ale nie ma wątpliwości, że wielcy matematycy cierpią z powodu cech maniakalnych, majaczenia i objawów schizofrenii.”

Louis de Branges de Borucia

- Ur. 21 sierpnia 1932
- Francusko-amerykański matematyk
- Udowodnienie hipotezy Bieberbacha
- Próby udowodnienia hipotezy Riemanna
- „Hipoteza Riemanna ułatwi zrozumienie rzeczywistości”

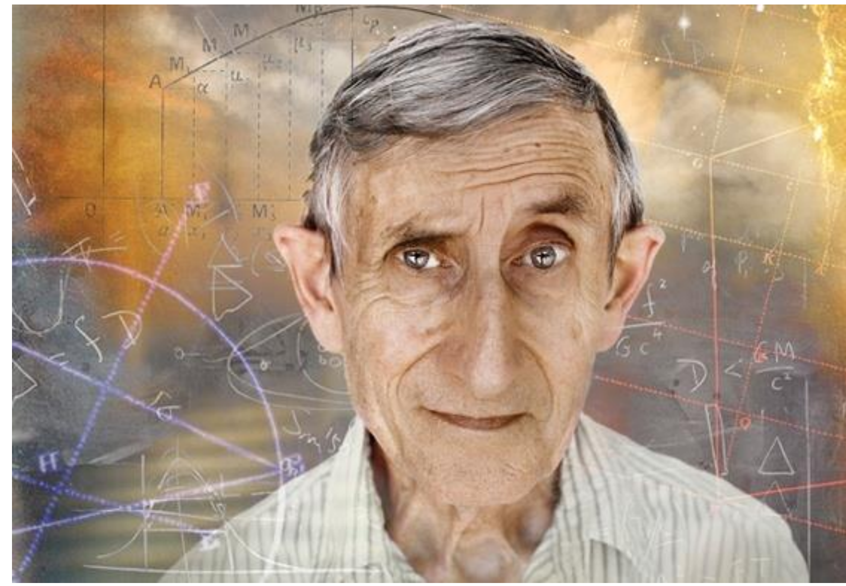
Louis de Branges de Borucia

- Analogia do pryzmatu
- Krytyka ze strony naukowców
- Trzykrotne ogłoszenie udowodnienia hipotezy od 1964 roku
- Potwierdzenie przypuszczeń de Branges’a w 1972 roku

- „Uczeni stroniący od hipotezy Riemanna popełniają wielki błąd, życie nie jest usłane różami, wielkie wyzwania nie znoszą pośpiechu, błądzenie to rzecz ludzka, nie należy się zniechęcać, tylko upór prowadzi do celu”

Hugh Montgomery i Freeman Dyson

(ur. 26 sierpnia 1944)
amerykański matematyk, pracuje w dziedzinie analitycznej teorii liczb i analizy matematycznej



(ur. 15 grudnia 1923)
angielski teoretyczny fizyk i matematyk, znany z pracy w elektrodynamice kwantowej, fizyce ciała stałego , astronomii i inżynierii jądrowej

Przypadkowe spotkanie

- Montgomery: funkcja opisująca zależności między miejscami zerowymi
- Dyson: funkcja rozkładu poziomów energetycznych jąder atomowych
- Przypuszczenia, że zmieniające się poziomy energetyczne w jądrze atomów warunkują liczby pierwsze

$$1 - \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)^2$$

Czwarte podejście de Branges’a

- 11 czerwca 2004 roku
- 23 stronicowy dokument opublikowany przez de Branges’a, w którym twierdzi, że jest w stanie udowodnić hipotezę Riemanna

- "Wysiłek de Branges’a zasługuje na uwagę matematyków"

Bibliografia

- Film „Hipoteza Riemanna Zagadka Wszech Czasów”: https://www.youtube.com/watch?v=usE0TwqPDME
- http://www.obi.opoka.org.pl/zfn/034/zfn03403Maslanka.pdf
- http://cytatybaza.pl/autorzy/john-nash.html
- http://polska.newsweek.pl/czlowiek-pieknego-umyslu,27855,1,1.html
- http://www.focus.pl/czlowiek/zginal-john-nash-matematyk-z-quotpieknego-umysluquot-12547